

クラッド短円柱の非定常熱応力

五 嶋 孝 仁

1. 緒 言

ディーゼル機関のピストンヘッドには、ステンレス鋼をクラディングしたものが多い。このようなクラッド端面が燃焼により過渡的な不均一加熱をうけたとき、不均一温度場による熱応力に加えて線膨張係数の差異に起因する相互拘束による熱応力が付加されて大きな熱応力が生じ破損の原因ともなりうる。このためクラッド材の熱応力に関しては今までに多くの報告があるが、端面が接合面となっている場合の報告例は少なく、接合面に熱発生がある複合長円柱や短柱の非定常熱応力問題を取り扱った石田¹⁾²⁾の報告や端面が剛体に接合された端円柱の熱応力を取り扱った小泉ら³⁾の報告がある程度である。著者⁵⁾は先に端面が接合されたクラッド短円柱の定常熱応力について報告したが、時間的に温度変化する非定常熱応力についての報告は見あたらないようである。

本研究ではピストンヘッドに関連して、局部加熱されるクラッド端面を有する短円柱の非定常熱応力を解析し、数値計算により温度分布や熱応力分布を明らかにした。解析にあたっては慣性項を省略した準静的問題と仮定し、材料の物性値は温度によらず一定とした。さらにステンレス鋼と炭素鋼からなる実際のクラッド短円柱試験片についてそのクラッド端面が局部加熱されるとき非定常熱応力を、抵抗ひずみゲージを用いて測定し、測定値を数値計算結果と比較して、本解析結果を用いて実際の試験片に生ずる熱応力を評価した一例を示した。

2. 理論解析

2.1 温度解析

温度解析にあたっては図1に示す円柱座標系 (r, z) を用い、以下の無次元変数を採用する。

$$\begin{aligned}\rho &= r/r_0, \quad \zeta = z/r_0, \quad \tau = \kappa_2 t/r_0^2, \quad B_0 = H_0 r_0/K_2, \quad h = H/r_0 \\ \eta &= H_1/r_0, \quad K = K_2/K_1, \quad \kappa = \kappa_2/\kappa_1, \quad \eta_1 = \eta/2, \quad \eta_2 = (h - \eta)/2 \\ \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\partial}{\rho \partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}, \quad \delta \kappa_j = \begin{cases} \kappa, & j=1 \\ 1, & j=2 \end{cases}\end{aligned}$$

ここで、 t は時間、 κ_j は温度伝導率、 K_j は熱伝導率、 H_0 は非加熱端面での熱伝達率を示し、添字 j は $j=1$ および 2 がそれぞれクラッド材および基材に対応する。また、本解析では $\kappa > 1$ と仮定する。

クラッド端面に時間とともにステップ状に変化する軸対称熱流束 $Q(\rho)$ が流入する場合を考える。このとき、熱伝導方程式を次式で示される。

$$\Delta T_j = \delta \kappa_j \frac{\partial T_j}{\partial \tau}, \quad (j=1, 2) \quad (1)$$

クラッド短円柱は両材料が接合された初期状態において無応力状態でかつ一様な温度とすれば、初期条件は次式で与えられる。

$$(T_j)_{\tau=0} = 0, (j=1, 2) \quad (2)$$

基材側の非加熱端面では熱伝達があり、円周面は断熱されていると仮定すれば、熱的境界条件は次式で与えられる。

$$\left(\frac{\partial T_1}{\partial \xi}\right)_{\xi=0} = -\frac{r_0}{K_1} Q(\rho) H(\tau) \quad (3);$$

$$\left(\frac{\partial T_2}{\partial \xi}\right)_{\xi=h} = -B_0 (T_2)_{\xi=h} \quad (4)$$

$$(T_1)_{\xi=\eta} = (T_2)_{\xi=\eta} \quad (5);$$

$$\left(\frac{\partial T_1}{\partial \xi}\right)_{\xi=\eta} = K \left(\frac{\partial T_2}{\partial \xi}\right)_{\xi=\eta} \quad (6)$$

$$\left(\frac{\partial T_j}{\partial \rho}\right)_{\rho=1} = 0, (j=1, 2) \quad (7)$$

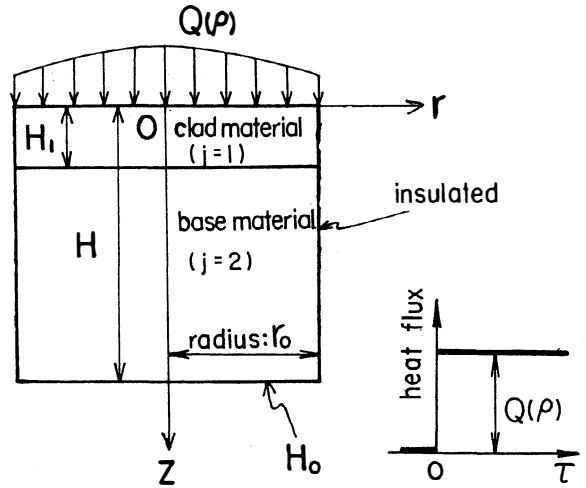


図1 座標系と加熱条件

ここで $H(\tau)$ はヘビサイドのステップ関数である。

式(2)を考慮して式(1)および式(3)–(7)を τ に関してラプラス変換し、さらに z 軸に関する対称性と式(5)を考慮して ρ に関して有限ハンケル変換を施せば、境界条件を満足する像空間での解が容易に求まる。得られた解をハンケル逆変換し、さらにラプラス像空間における解の特異点の位置に注意してラプラス逆変換すれば、温度解 T_j が次式のように求められる。

$$T_j = \frac{4r_0}{K_1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\bar{Q}(\xi_k)}{J_0^2(\xi_k)} J_0(\xi_k \rho) \sum_n \frac{\beta_n F_j(\xi)}{f'(x_n)} \omega_n(\tau) \quad (8)$$

ここで

$$\omega_n(\tau) = 1 - e^{-(\xi_k^2 + x_n^2)\tau/x} \quad (9); \quad \bar{Q}(\xi_k) = \int_0^1 \rho Q(\rho) J_0(\rho \xi_k) d\rho \quad (10)$$

ξ_k は $J_1(\xi_k) = 0$ の第 k 番目の正根であり ($\xi_0 = 0$)、 $J_N(\)$ は N 次の第1種ベッセル関数を表わす。また $F_j(\xi)$ および $f(x_n)$ は次式のように表わされる。

1) $x_n < \xi_k(x-1)^{1/2}$ のとき

$$F_1(\xi) = M_x \cos(\eta - \xi)x_n + K N_x (\beta_n/x_n) \sin(\eta - \xi)x_n \quad (11)$$

$$F_2(\xi) = \beta_n \cosh(h - \xi)\beta_n + B_0 \sinh(h - \xi)\beta_n$$

$$M_x = \beta_n \cosh(h - \eta)\beta_n + B_0 \sinh(h - \eta)\beta_n, N_x = \beta_n \sinh(h - \eta)\beta_n + B_0 \cosh(h - \eta)\beta_n$$

$$\beta_n = \{(1 - 1/x)\xi_k^2 - x_n^2/x\}^{1/2}$$

$$x_n: f(x_n) = x_n M_x \sin \eta x_n - K \beta_n N_x \cos \eta x_n = 0 \text{ を満足する } n \text{ 番目の正根 (各 } \xi_k \text{ に対し)}$$

2) $X_n > \xi_k(x-1)^{1/2}$ のとき

$$F_1(\zeta) = L_x \cos(\eta - \zeta)x_n - K R_x(\beta_n/x_n) \sin(\eta - \zeta)x_n \quad (12)$$

$$F_2(\zeta) = \beta_n \cos(h - \zeta)\beta_n + B_0 \sin(h - \zeta)\beta_n$$

$$L_x = \beta_n \cos(h - \eta)\beta_n + B_0 \sin(h - \eta)\beta_n, \quad R_x = \beta_n \sin(h - \eta)\beta_n - B_0 \cos(h - \eta)\beta_n$$

$$\beta_n = \{x_n^2/x - (1 - 1/x)\xi_k^2\}^{1/2}$$

$$x_n : f(x_n) = x_n L_x \sin \eta x_n + K \beta_n R_x \cos \eta x_n = 0 \text{ を満足する } n \text{ 番目の正根 (各 } \xi_k \text{ に対し)}$$

2.2 熱応力解析

熱応力解析にあたっては、 $\zeta_1 = \eta/2 - \zeta$, $\zeta_2 = (h - \eta)/2 + \eta - \zeta$ のようにそれぞれの短円柱の中心を原点とした座標系に座標変換する。いま u_{rj} , w_{zj} をそれぞれ ρ , ζ_j 方向変位とし、 ν_j , α_j をそれぞれ材料のポアソン比、線膨張係数とすれば、変位の熱弾性基礎式の解は次式で与えられる。⁴⁾

$$\begin{aligned} \frac{u_{rj}}{r_0} &= \frac{\partial \mathcal{Q}_j}{\partial \rho} + \frac{\partial \phi_{0j}}{\partial \rho} + \zeta_j \frac{\partial \phi_{3j}}{\partial \rho} + \rho \frac{\partial \phi_{4j}}{\partial \zeta_j} \\ \frac{w_{zj}}{r_0} &= \frac{\partial \mathcal{Q}_j}{\partial \zeta_j} + \frac{\partial \phi_{0j}}{\partial \zeta_j} + \zeta_j \frac{\partial \phi_{3j}}{\partial \zeta_j} - \rho \frac{\partial \phi_{4j}}{\partial \rho} - (3 - 4\nu_j)\phi_{3j} - 4(1 - \nu_j)\phi_{4j} \end{aligned} \quad (j=1, 2) \quad (13)$$

ここで、 \mathcal{Q}_j , ϕ_{ij} は次式を満足する。

$$\Delta_j \mathcal{Q}_j = \frac{1 + \nu_j}{1 - \nu_j} \alpha_j T_j, \quad \Delta_j \phi_{ij} = 0, \quad (j=1, 2)(i=0, 3, 4) \quad (14)$$

$$\Delta_j = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\partial}{\rho \partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta_j^2}$$

また、クラッド短円柱には外力が働かず、 $j=1$ と $j=2$ の短円柱が端面で完全に接合されているとすれば、力学的境界条件は次式のように表わされる。

$$(\sigma_{z1})_{\zeta=0} = (\tau_{rz1})_{\zeta=0} = (\sigma_{z2})_{\zeta=h} = (\tau_{rz2})_{\zeta=h} = 0 \quad |\rho| \leq 1 \quad (15)$$

$$(\sigma_{z1})_{\zeta=\eta} = (\sigma_{z2})_{\zeta=\eta}, \quad (\tau_{rz1})_{\zeta=\eta} = (\tau_{rz2})_{\zeta=\eta}, \quad |\rho| \leq 1 \quad (16)$$

$$(u_{r1})_{\zeta=\eta} = (u_{r2})_{\zeta=\eta}, \quad (w_{z1})_{\zeta=\eta} = (w_{z2})_{\zeta=\eta}, \quad |\rho| \leq 1 \quad (17)$$

$$(\sigma_{r1})_{\rho=1} = (\sigma_{r2})_{\rho=1} = 0, \quad |\zeta_j| \leq \eta_j \quad (18)$$

$$(\tau_{rz1})_{\rho=1} = (\tau_{rz2})_{\rho=1} = 0, \quad |\zeta_j| < \eta_j \quad (19)$$

本解析モデルの軸対称性および有限性などを考慮して、式(14)を満足する熱弾性変位ポテンシャル \mathcal{Q}_j および応力関 ϕ_{ij} を次式のように置く³⁾。

$$\mathcal{Q}_j = -\frac{1 + \nu_j}{1 - \nu_j} \alpha_j \frac{4r_0}{K_1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\bar{Q}(\xi_k)}{J_0^2(\xi_k)} J_0(\xi_k \rho) \sum_n \frac{\beta_n F_j(\zeta) \omega_n(\tau)}{(\beta_n^2 + \xi_k^2) f'(x_n)} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \phi_{0j} &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(\beta_m \rho)}{\beta_m J_1(\beta_m)} \left\{ A_{mj} \frac{\sinh(\beta_m \zeta_j)}{\cosh(\beta_m \eta_j)} + B_{mj} \frac{\cosh(\beta_m \zeta_j)}{\sinh(\beta_m \eta_j)} \right\} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ C_{nj} \frac{I_0(\gamma_{nj} \rho)}{\gamma_{nj}^2 I_1(\gamma_{nj})} \sin(\gamma_{nj} \zeta_j) + D_{nj} \frac{I_0(\delta_{nj} \rho)}{\delta_{nj}^2 I_1(\delta_{nj})} \cos(\delta_{nj} \zeta_j) \right\} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\phi_{3j} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(\beta_m \rho)}{J_1(\beta_m)} \left\{ E_{mj} \frac{\sinh(\beta_m \zeta_j)}{\sinh(\beta_m \eta_j)} + F_{mj} \frac{\cosh(\beta_m \zeta_j)}{\cosh(\beta_m \eta_j)} \right\} \quad (22)$$

$$\phi_{4j} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ G_{nj} \frac{I_0(\delta_{nj}\rho)}{\delta_{nj}^2 I_1(\delta_{nj})} \sin(\delta_{nj}\zeta_j) + H_{nj} \frac{I_0(\gamma_{nj}\rho)}{\gamma_{nj}^2 I_1(\gamma_{nj})} \cos(\gamma_{nj}\zeta_j) \right\} \quad (23)$$

ここで、 $A_{mj}, B_{mj}, C_{nj}, D_{nj}, E_{mj}, F_{mj}, G_{nj}, H_{nj}$ は未定定数であり、 $J_N(\cdot), I_N(\cdot)$ はそれぞれN次の第一種ベッセル関数、変形ベッセル関数を表す。また、 β_m は $J_0(\beta) = 0$ の第m番目の正根であり、 $\gamma_{nj} = (2n-1)\pi/(2\eta_j)$ 、 $\delta_{nj} = n\pi/\eta_j$ である。

式(20)–(23)を式(13)に代入すれば変位の表示式が得られ、さらにデュアメル・ノイマン則に代入すれば熱応力の表示式を得る。このようにして求まった応力および変位を境界条件式(15)–(19)に代入する。さらに、 $I_0(\gamma_{nj}\rho)$ 、 $\gamma_{nj}\rho I_1(\gamma_{nj}\rho)$ 、 $I_0(\delta_{nj}\rho)$ 、 $\delta_{nj}\rho I_1(\delta_{nj}\rho)$ を $J_0(\beta_m\rho)$ に関して、 $I_1(\gamma_{nj}\rho)$ 、 $\gamma_{nj}\rho I_0(\gamma_{nj}\rho)$ 、 $I_1(\delta_{nj}\rho)$ 、 $\delta_{nj}\rho I_0(\delta_{nj}\rho)$ を $J_1(\beta_m\rho)$ に関してフーリエ・ベッセル展開し、 $\cosh(\beta_m\zeta_j)$ と $\beta_m\zeta_j \sinh(\beta_m\zeta_j)$ については $\cos(\delta_{nj}\zeta_j)$ または $\cos(\gamma_{nj}\zeta_j)$ に関し、 $\sinh(\beta_m\zeta_j)$ と $\beta_m\zeta_j \cosh(\beta_m\zeta_j)$ については $\sin(\gamma_{nj}\zeta_j)$ または $\sin(\delta_{nj}\zeta_j)$ に関してフーリエ展開すれば、それぞれの境界条件より ρ または ζ_j に独立に未定定数に関する無限組の16元連立方程式が得られる。この連立方程式をさらに整理しまとめれば、結局本問題は次式のような形の F_{mj}, E_{mj} に関する四重の無限連立一次方程式を解く問題に帰着される。

$$F_{kj} + \sum_{m=1}^{\infty} \{S_{1j}F_{m1} + U_{1j}E_{m1} + S_{2j}F_{m2} + U_{2j}E_{m2}\} = X_{kj} \quad (j=1, 2; k=1, 2, 3, \dots) \quad (24)$$

$$E_{kj} + \sum_{m=1}^{\infty} \{Q_{1j}F_{m1} + V_{1j}E_{m1} + Q_{2j}F_{m2} + V_{2j}E_{m2}\} = Y_{kj} \quad (j=1, 2; k=1, 2, 3, \dots) \quad (25)$$

ここで、 $S_{ij}, U_{ij}, Q_{ij}, V_{ij}$ ($i=1, 2$) および X_{kj}, Y_{kj} は既知関数であるが、ここではその表示式は省略する。式(24)(25)を数値的に解けば未定定数が決定され、熱応力が求められる。

3. 数値計算

数値計算例としては後述の実験で用いる試験片材料と対応して、ステンレス鋼と炭素鋼からなるクラッド短円柱を採用した。それぞれの材料の物性値を表1に示す。また簡単な場合として無次元加熱半径 ρ_0 の円形領域のみが一定熱流束 Q_0 で局部加熱される場合、すなわち $Q(\rho) = Q_0(|\rho| \leq \rho_0)$ の場合について数値計算を行なった。このとき式(10)は次式ようになる。

$$\bar{Q}(\xi_k) = K_2 T^* \rho_0 J_1(\xi_k \rho_0) / (\xi_k r_0), \quad T^* = Q_0 r_0 / K_2 \quad (26)$$

また以下の数値計算例ではすべて、 $\rho_0 = 0.4$ 、 $B_0 = 1.0$ 、 $h = 2.0$ とした。まず、図2、3には接合面上の軸応力分布およびせん断応力分布の時間的変化を示す。 $\tau = 1.0$ ですでに定常値に達している。加熱部の軸方向変位のため、加熱半径内では引張の軸応力を示し、非加熱部の大きな拘束のため加熱半径よりも大きな半径の領域では圧縮の軸応力を示している。またせん断応力は加熱半径付近で最大を示している。図4および図5には中心軸上の軸応力分布および半径

| | clad material: j=1 stainless-steel | base material: j=2 carbon-steel |
|------------|---|--|
| α_j | $17.9 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$ | $12.2 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$ |
| E_j | 193 GPa | 207 GPa |
| K_j | 16.3 W/(mK) | 53.4 W/(mK) |
| κ_j | $4.4 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ | $14.7 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ |
| ν_j | 0.3 | 0.3 |

表1 材料の物性値

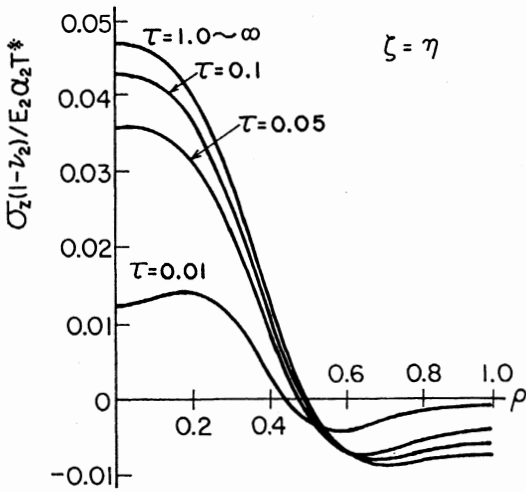


図2 接合面の軸応力分布の時間的変化

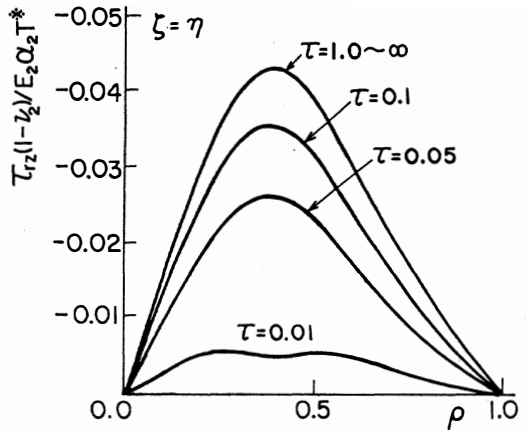


図3 接合面のせん断応力分布の時間的変化

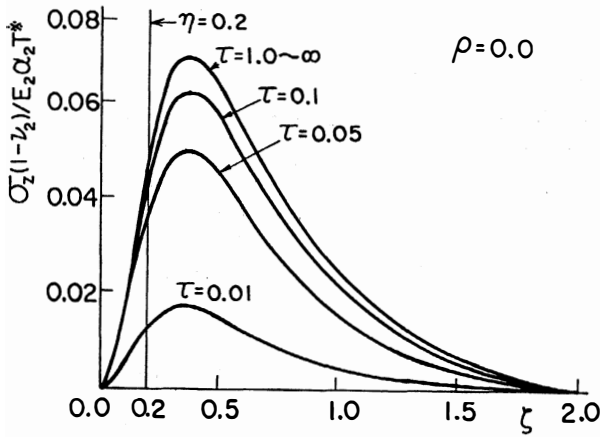


図4 中心軸上の軸応力分布の時間的変化

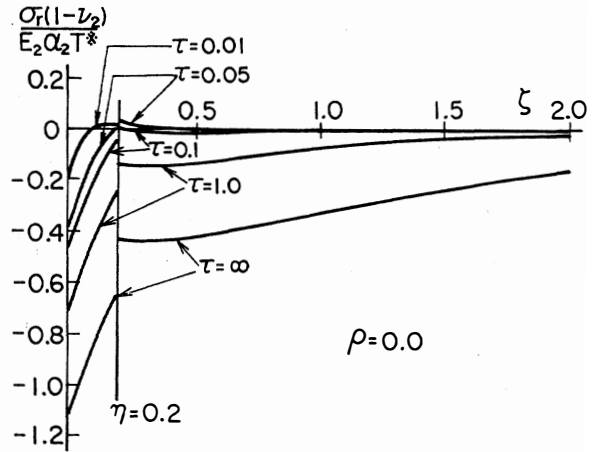


図5 中心軸上の半径(円周) 応力分布の時間的変化

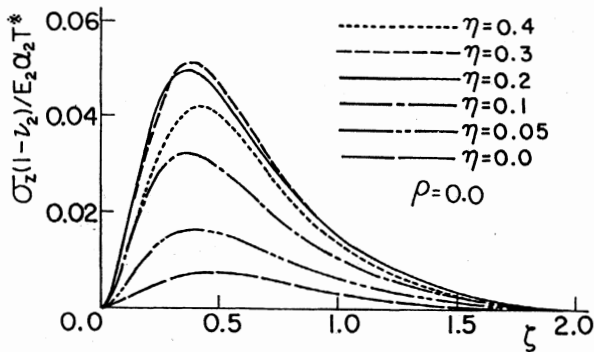


図6 クラッド部厚さが中心軸上の軸応力分布に及ぼす影響

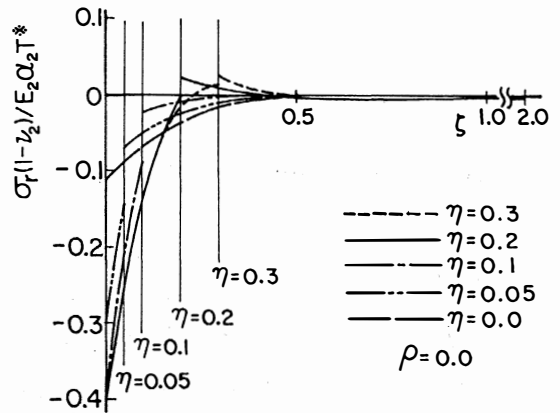


図7 クラッド部厚さが中心軸上の半径(円周) 応力分布に及ぼす影響

(円周) 応力分布の時間的変化を示す。最大圧縮応力は加熱面中心での半径(円周) 応力に生じ、最大引張応力は中心軸上の $\zeta=0.4$ 付近での軸応力に生じている。以上の計算結果はすべてクラッド部と円柱半径の比 $\eta=0.2$ の場合の結果であるが、図6, 7には $\tau=0.05$ の場合について中心軸上の軸応力および半径(円周) 応力分布に及ぼす η の影響を示す。クラッド端面中心の最大圧縮応力の値は、クラッド部が厚くなる程大きくなるが、 $\eta \geq 0.1$ ではほぼ一定値に漸近している。一方最大引張応力は本数値例ではクラッド部の厚さにはほとんど関係なく、いずれの場合にもほぼ $\zeta=0.4$ 付近での軸応力に生じており、その大きさはクラッド部が厚くなる程大きくなるが、 $\eta=0.3$ で最大を示し $\eta > 0.3$ ではかえって小さくなる傾向を示している。

4. 実 験

図8に示すようなクラッド短円柱のステンレス端面円形領域が溶融スズ(270°C)で過渡的に局部加熱される場合⁵⁾ の非定常熱応力を測定した。熱応力測定法は小泉⁶⁾⁷⁾ によって考案された熱電対挿入型抵抗ひずみゲージを用いた平均法による方法を採用した。すなわち図9のような熱電対を挿入した連続5枚組ゲージを作成し、このうちB, Dのゲージを図10のように実際の熱応力測定に用い、残りA, C, Eのゲージの見かけのひずみを測定し、AとC(CとE)の平均値をB(D)の見かけのひずみとし

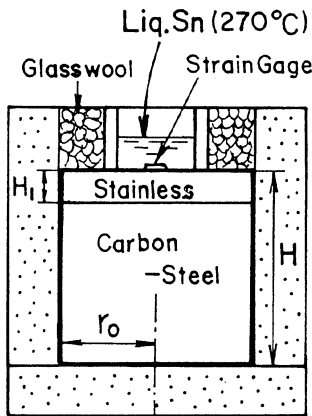


図8 試験片

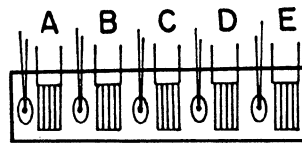


図9 高温用5枚組ゲージ

$r_0=50\text{mm}$, $H_1=10\text{mm}$
 $H=100\text{mm}$

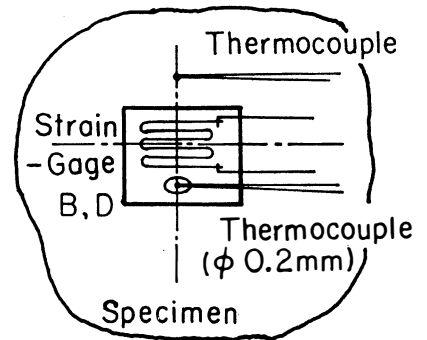


図10 熱応力測定用ゲージ

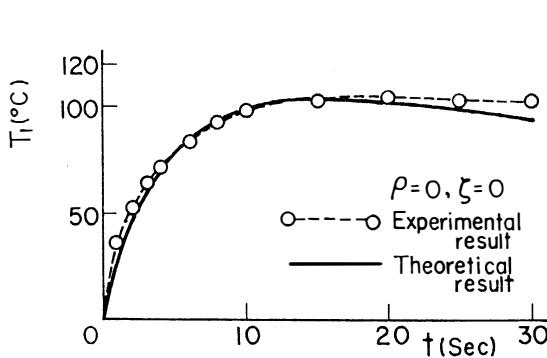


図11 加熱面中心温度の時間的変動

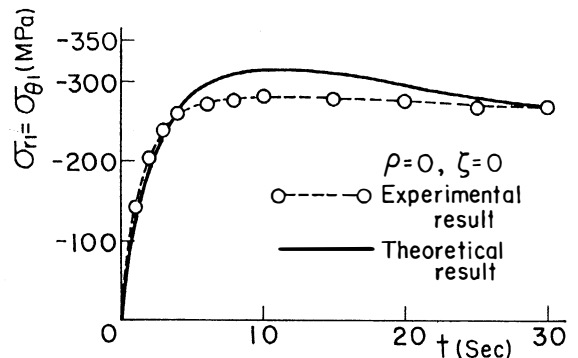


図12 加熱面中心での熱応力の時間的変動

て利用する方法を用いた。なお挿入した熱電対によりゲージ箔温度を推定している。

見かけのひずみの測定はA, C, EのゲージをB, Dゲージ接着部材料と同じ材料から成る微小試験片に接着し、恒温槽で長時間一定温度に保つことにより定常温度場を作り熱応力が無い状態でのひずみ（見かけのひずみ）を各設定温度毎に静ひずみ計で測定する。熱応力の測定は熔融スズで急激に加熱された瞬間からひずみゲージの出力（相当ひずみ）を動ひずみ則定器で温度変動とともに測定し、電磁オシログラフおよびペン書きレコーダーで過渡的な変動を記録する。得られた相当ひずみの結果を予め測定された見かけのひずみとゲージ素子温度結果を用いて温度補償した後、熱応力の結果を得る。

図11および図12には加熱面中心での温度および熱応力の時間的変動について、測定値と理論値の比較を示す。両者にはほぼよい一致がみられる。

5. 結 言

端面が局部加熱さるクラッド短円柱の非定常熱応力を解析し、ステンレス鋼と炭素鋼から成るクラッド短円柱について数値計算および測定実験を行ない次の結論を得た。

- (1) 接合面付近の基材内部で軸方向に最大引張応力が生ずる。また接合面上の加熱半径付近で最大のせん断応力が生ずる。
- (2) 最大応力の発生位置はクラッド厚さによってあまり影響を受けないが、ある値までの範囲ではクラッド部が厚くなるほど最大応力は大きくなる。
- (3) 熔融金属で局部加熱されるクラッド短円柱の加熱面中心の最大圧縮応力は、本解析結果でかなり正確に評価できる。

参 考 文 献

- 1) 石田, 機論, **52-476**, A (1986), 788.
- 2) 石田, 機論, **51-471**, A (1985), 2459.
- 3) Koizumi, T., Ishikawa, O. and Shibuya, T., J. Thermal Stress, **4-2** (1981), 249.
- 4) Koizumi, T., Z. AMM., **50** (1970), 747.
- 5) 五嶋・ほか2名, 非破壊検査, **23-11** (1974), 601.
- 6) 小泉, 非破壊検査, **11-3** (1962), 107.
- 7) 小高・小泉, 非破壊検査, **17-3** (1968), 484.

Transient Thermal Stresses in a Finite Clad Cylinder

Takahito GOSHIMA

This paper deals with the transient thermal stresses in a finite clad circular cylinder, which is joined two finite circular cylinders of different materials together on the ends, subjected to partially and axisymmetrically heated on the clad end. The thermoelastic problem is formulated in terms of a thermoelastic displacement potential and three harmonic stress functions. Numerical calculations and the measurements by using resistance strain gages are carried out for the case of the clad cylinder which consists of stainless-steel and carbon-steel. The theoretical results were in agreement with the experimental ones.

〔英文和訳〕

クラッド短円柱の非定常熱応力

五 嶋 孝 仁

端面が接合された異種材料の短円柱から成るクラッド短円柱がそのクラッド端面を非定常局部加熱されるとき非定常熱応力を取り扱う。本熱弾性問題の解析は熱弾性変位ポテンシャルと3つの調和応力関数を用いて行う。とくに、ステンレスクラッドと炭素鋼から成るクラッド短円柱について、数値計算を行い、また、ひずみゲージを用いて非定常熱応力の測定も合わせて行った。その結果、理論値と測定実験結果とは良い一致が見られた。